

Борис Ротгауз, Вадим Ротгауз

Решение линейных задач математической физики Методом Подбора Параметров.

Изложенный ниже Метод Подбора Параметров – МПП может быть использован для решения тех проблем математической физики, которые можно аппроксимировать линейными задачами, т.е. такими задачами, для которых имеет место принцип суперпозиции. Осмыслить идею и изложить процедуру этого итерационного метода проще всего, используя понятия и терминологию теории упругих систем/конструкций. Это связано с тем, что метод был разработан для решения именно таких задач, как альтернатива широко распространенному Методу Конечных Элементов – МКЭ. Вначале приведен алгоритм МПП в самом общем виде вне связи с какими-либо прикладными задачами, а затем указана подробная процедура использования этого метода для расчета любых упругих конструкций. В заключение сделана попытка оценить эффективность МПП путем расчета простейшей конструкции, для которой существует точное аналитическое решение.

Суть МПП заключается в следующем. Пусть требуется найти решение $y(x)$ операторного уравнения:

$$\Psi\{y(x)\} = F(x), \quad (1)$$

где $F(x)$ и $\Psi\{y(x)\}$ заданные в какой-то области S независимого переменного x ($x \in S$) соответственно функция и дифференциальный оператор включающий в себя и граничные условия. Решение задачи (1) может быть получено как соответствующее решение следующей системы двух уравнений для функций $y(x)$ и $g(x)$:

$$\Psi_1\{y(x)\} = \lambda \cdot y(x) \cdot g(x) \quad (2)$$

$$F(x) - \Psi_2\{y(x)\} = \lambda \cdot y(x) \cdot g(x) \quad (3)$$

Здесь $\Psi_1\{y(x)\} = \Psi\{y(x)\} - \Psi_2\{y(x)\}$, где дифференциальный оператор $\Psi_2\{y(x)\}$ можно определенным образом принимать таким, который позволит при желании или необходимости упростить уравнение (2). В случае отсутствия такого желания можно принимать $\Psi_2\{y(x)\} \equiv 0$. Постоянная λ , ниже называемая собственным значением, определяется из необходимости удовлетворения граничным условиям задачи (1). Функция $g(x)$ введена искусственно как вспомогательная для реализации следующего итерационного процесса, позволяющего найти решение системы уравнений (2) и (3) а, следовательно, и решения исходной задачи (1). Очередная итерация для искомого решения $y(x)$ получается в результате решения однородной задачи (2), в которой функция $g(x)$ является решением линейного алгебраического уравнения (3) относительно этой функции. При этом коэффициенты уравнения (3) определяются с использованием предыдущей итерации задачи (2). Начинать итерационный процесс можно либо с задания исходного значения (начальной/нулевой итерации) для произведения - $\lambda_0 \cdot y_0(x) \neq 0$, либо с задания исходного значения для функции - $g_0(x) \neq 0$, в зависимости от того, начинать ли итерационный процесс соответственно с решения линейного алгебраического уравнения (3)

или с решения однородной операторной задачи (2). Выбор с чего начинать итерационный процесс, а также выбор значений нулевых итераций в уравнениях (2) и (3), вообще говоря, произволен и может незначительно влиять разве что на необходимое для получения удовлетворительной точности искомого решения число шагов итерационного процесса. Сходимость итерационного процесса будет иметь место, поскольку в каждое из уравнений (2) и (3) функции $g(x)$ и $y(x)$ входят линейно. Необходимо иметь виду, что поскольку однородная операторная задача (2) может иметь счетное число нетривиальных решений, то на каждой итерации при решении ее необходимо находить и использовать лишь одно – одинаковое по номеру – собственное значение λ^* , и соответствующую ему собственную функцию $y^*(x)$. Для самосопряженного оператора $\Psi_1 \{ \}$ с действительными коэффициентами (именно такого типа операторами описываются практически все задачи расчета упругих систем) все собственные значения действительны, и в этом случае проще всего находить на каждой итерации самое малое по модулю собственное значение.

Преимущество МПП по сравнению с другими известными способами решения линейных задач, например, методом Фурье разложения в ряд по собственным формам, или способом с использованием функции Грина, заключается в том, что в МПП значения функций $g(x)$ и $y(x)$ на очередных итерациях определяется целенаправленно и с учетом предыдущих приближений, что существенно оптимизирует объем вычислений. В то время как в методе разложения в ряд по собственным формам, очередными приближениями являются суммы слагаемых сходящегося ряда, в котором вид каждого слагаемого не зависит от предыдущих приближений а, следовательно, отсутствует возможность улучшить сходимость ряда и тем самым уменьшить объем вычислений. А при использовании функции Грина вообще никаких приближений не ищут, и задача всегда решается в полном объеме (находится так называемая функция влияния или функция Грина), вне зависимости от того какая достаточна точность искомого результата. При этом решаются в квадратурах множество более простых задач, число которых совпадает с числом значений независимой переменной x , в которых задана функция $F(x) \neq 0$, а решением исходной задачи является сумма (интеграл) всех таких простых задач.

Как видно из выше изложенного, в МПП использован прием аналогичный приему метода Фурье, впервые примененного для решения задачи о колебании струны. Этот прием заключается в разбиении исходной задачи на две задачи, каждая из которых имеет различные независимые переменные, но обе задачи содержат одинаковую константу. Как минимум одна из этих задач является задачей на собственные значения, которыми являются значения принимаемые упомянутой константой. Нетривиальными решениями этой задачи а, следовательно, и решениями исходной задачи, если она однородна, т.е. если струна свободна – не нагружена никакой нагрузкой, являются решения при таких значениях этой константы. Определяя эти значения (как правило, из необходимости удовлетворения граничным условиям), находят решение и неоднородной исходной задачи в виде сходящегося ряда, слагаемыми которого являются нормированные определенными коэффициентами (зависящими от действующей на струну нагрузки) собственные функции соответствующие очередным собственным значениям. В МПП исходная задача тоже разбивается

на две самостоятельные задачи (2) и (3), одна из которых – (2) является тоже задачей на собственные значения. Но в отличие от метода Фурье в МПП обе задачи имеют одинаковые (а не разные) независимые переменные и имеют одну и ту же функцию $g(x)$, а не одинаковую константу. Определение, точнее говоря, подбор вида этой функции с помощью ниже указанной итерационной процедуры, что эквивалентно подбору параметров этих задач (отсюда и название метода) решает исходную неоднородную задачу, но уже не в виде ряда как в методе Фурье, и не в виде интеграла как в методе Грина, а в виде одной функции. Заметим, что если в методе Фурье необходимость разделения переменных ограничивает класс решаемых задач, как минимум числом независимых переменных исходной задачи, количество которых должно быть не меньше двух (в задаче о колебаниях струны ими являются временная и пространственная переменные), то в МПП не регламентируется число переменных для возможности разделения задачи. Этим методом можно решать и задачи одной независимой переменной, что ниже и использовано при расчетах любых упругих линейных систем, в том числе и пространственных, поскольку, как ниже показано, даже последние можно описать практически с любой степенью детализации упругими одномерными системами (системами одной переменной).

Прежде чем применить МПП к расчету упругих конструкций, формализуем в соответствии с аксиоматической парадигмой естествознания см.[1] само определение таких конструкций, принципиально не отличающееся от общепринятого представления о них, и определим физический смысл используемых при этом терминов (в частности таких как «упругая связь», «собственная форма», «собственная нагрузка» и др.) с тем, чтобы исключить разночтение в восприятии нижеизложенного. Под **упругой/деформируемой конструкцией** будем понимать такую систему счетного числа не менее трех материальных объектов, в которой изменение относительной пространственной удаленности каких-нибудь двух из них приводит к изменению удаленности любого другого объекта такой системы относительно хотя бы одного из этих двух объектов. Материальными объектами ниже называются такие объекты, одной из характеристик которых является масса, качественно указывающая на то что каждый такой объект является составным (состоит из не менее трех материальных объектов) и количественно определяющая число объектов составляющих характеризуемый объект. В конечном счете масса определяет число квантов материи составляющих объект. В соответствии с терминологией принятой в теории упругих конструкций говорят, что каждые два объекта упругой конструкции связаны друг с другом «упругой связью», которая передает так называемое «действие» от одного объекта другому объекту – «взаимодействует» с этими объектами. Это «действие» называют нагрузкой и говорят, что через упругие связи к каждому объекту конструкции обязательно приложены, как минимум, **внутренние нагрузки**, из-за чего объекты могут менять пространственную удаленность друг относительно друга. Изменения относительной удаленности упруго связанных объектов конструкции называется **деформированием** ее. Деформирования должны быть соизмеримы с относительными пространственными удаленностями между объектами конструкции, что и позволяет отличать внутренние объекты конструкции от внешних материальных объектов, способных тоже менять удаленности относительно каких-то внутренних объектов конструкции тем и самым взаимодействовать с ними – передавать им **внешние нагрузки**. Различие между

внутренними и внешними объектами в том, что относительные изменения внешних объектов могут быть несоизмеримыми – сколь угодно малыми или сколь угодно большими – по сравнению с относительными изменениями внутренних объектов.

Исходя из практических соображений, за изменениями деформированного состояния упругой конструкции более рационально наблюдать, используя не удаленности каждого ее объекта относительно всех других объектов системы, а **пространственные координаты** – пространственные удаленности объектов конструкции до материальных объектов одной какой-нибудь внешней их системы. Желательно, чтобы относительные пространственные удаленности самих объектов такой внешней системы друг относительно друга не менялись (в крайнем случае, такие изменения должны учитываться), и поэтому такая система должна быть недеформируемой, т.е. жестким материальным телом, называемым **телом отсчета**. Для того чтобы имелась возможность однозначно проверить деформируема ли система материальных объектов или нет, необходимо, чтобы число (конечное) различных пар объектов составляющих такую систему совпадало бы с числом самих объектов. Этой особенностью обладает лишь система трех объектов. Таким образом, число пространственных координат, однозначно идентифицирующих каждый материальный объект конструкции, должно в общем случае равняться трем. При этом упругую конструкцию называют трехмерной или пространственной. В случае если для идентификации каждого объекта конструкции достаточно лишь двух координат, то конструкция называется двумерной или плоской. Если для каждого объекта достаточна только одна координата, то конструкция называется одномерной или линейной. Иногда говорят в соответствующих случаях, что конструкция расположена в трехмерном, двумерном или в одномерном пространстве, или что ее объекты могут иметь соответствующее число **степеней свободы**. Число удаленностей объектов конструкции друг от друга, как правило, намного превышает число самих объектов или их координат, чем и объясняется целесообразность использования координат объектов. С помощью таких координат можно в случае необходимости определять также и любые относительные изменения пространственных удаленностей друг от друга всех пар этих объектов.

Если деформирование каких-нибудь трех и более объектов конструкции не представляет интерес, то такие объекты удобнее рассматривать как единую недеформируемую часть конструкции, т.е. рассматривать ее как один из материальных объектов конструкции. Каждая такая часть должна характеризоваться, помимо своих пространственных координат, еще и своими **размерами** – пространственными удаленностями между объектами, входящими в эту недеформируемую часть. Поэтому такую часть иногда называют **конечномерным материальным объектом** или сосредоточенной конечно(раз)мерной массой, в отличие от так называемой **распределенной (континуальной) массы** обозначаемой $m(x)$, представляющей систему масс, пространственные удаленности между которыми бесконечно малы и поэтому для идентификации континуальных масс не используют их размеры, а используют непрерывные функции. Во многих задачах, в которых участвует конечномерная масса, для идентификации ее удобнее задавать дополнительно к пространственным координатам не размеры этой массы, а ее так называемые **угловые координаты**, которые могут быть получены путем арифметических операций с размерами и пространственными координатами объектов

составляющих такую массу. Заметим, что угловые координаты используются для идентификации не только конечномерных, но также и континуальных масс, размерами которых не задаются. Относительные изменения пространственных и угловых координат «упруго связанных» объектов конструкции называются соответственно **нормальными и сдвиговыми деформациями** ее. Принятое определение упругой конструкции не требуют обязательного рассмотрения «упругих связей» между ее объектами как конечномерных материальных объектов. Это положение имеет место не только для **континуальной упругой конструкции**, ее еще называют упругой средой, т.е. такой для которой нет необходимости или возможности (скорее всего – пока) экспериментально определять значения относительных удаленностей соседних друг к другу материальных объектов, называемых в этом случае бесконечно малыми значениями. Но и для **дискретной системы** материальных объектов, для которой относительные удаленности всех их пар являются конечными – способными быть определенными непосредственно опытным путем. Подчеркнем, что выбор континуального или дискретного представления конкретной упругой конструкции является, в конечном счете, сугубо субъективным и это необходимо иметь в виду, и относиться скептически к утверждениям о том, что одно из этих представлений объективно является аппроксимацией (упрощением или приближением) другого представления. Заметим, что необязательность рассмотрения «упругих связей» между объектами как конечномерных материальных объектов может иметь место не только при расчетах упругих конструкций, но и при рассмотрении других систем материальных объектов, в которых пространственные удаленности объектов тоже определенным образом «связаны» друг с другом. Например, при наблюдениях планет солнечной системы или других планетарных систем.

Нагрузки, вызывающие изменения только пространственных координат объектов, называют **силами**, а нагрузки, вызывающие изменения только угловых координат объектов, называют **моментами**. При этом говорят, что силы вызывают поступательные движения объектов, а моменты – вращательные движения (повороты). На каждый объект конструкции могут действовать независимые друг от друга, как силы, так и моменты, являющиеся или внутренними или внешними нагрузками. Формы деформирования, которые конструкция может приобретать под действием внешних нагрузок, приложенных к каким либо массам ее, будем называть **вынужденными формами** и обозначать $y(x)$. Ниже будем рассматривать только такие малые статические деформации конструкции, при которых имеет место так называемая физическая и геометрическая линейность. Такое деформирование конструкций имеет место для большинства реальных условий работы их. В иных случаях, нелинейная работа конструкции может быть аппроксимирована на отдельных участках соответствующим линейным деформированием конструкции. Без существенного ограничения общности будем рассматривать лишь консервативные упругие конструкции, деформирование которых описывается самосопряженными вещественными операторами $\Psi\{ \}$. Таким образом, для определения вынужденного деформированного состояния упругой конструкции $y(x)$ под действием внешней нагрузки $F(x)$, необходимо решать неоднородную линейную задачу математической (1). В случаях отсутствия внешних объектов (невозможности их идентифицировать), а, следовательно, и отсутствия внешних нагрузок $F(x) \equiv 0$, состояние конструкции называют **недеформированным**

(тривиальным, исходным, начальным и т.п.) $Y(x)$. От этого состояния «отсчитывают» любые другие состояния, которые конструкция может иметь в случаях действия на нее внешних нагрузок.

При определенных условиях, о которых говорится ниже, упругая конструкция может приобретать и так называемые **собственные формы**, которые будем обозначать $\varphi_i(x)$. Эти формы получены в результате действия только внутренних нагрузок – обусловлены взаимодействием лишь внутренних объектов конструкции друг с другом, а не действием внешних нагрузок. Если формально рассматривать каждый объект конструкции как внешний по отношению к системе всех других объектов ее, то можно говорить, что собственные формы тоже являются вынужденными формами деформирования, но не искусственными, а естественными. Т.е. формами, приобретаемыми конструкцией под действием не внешних, а только внутренних **собственных нагрузок**, ниже обозначаемых $F_i(x)$, возникающих благодаря существованию внутренних объектов конструкции. Такие нагрузки, количество которых совпадает с числом внутренних объектов (точнее говоря с числом степеней свободы их), по величине должны быть, согласно выше приведенным определениям, пропорциональны соответствующим массам $m(x)$ и собственным формам. С учетом этого собственные нагрузки и формы связаны следующими соотношениями:

$$F_i(x) = \lambda_i \cdot m(x) \cdot \varphi_i(x), \quad (4)$$

здесь λ_i коэффициенты пропорциональности называемые собственными значениями. Очевидно, что для получения собственных форм необходимо в правую часть (1) вместо $F(x)$ подставить $F_i(x)$ из (4) и, следовательно, решать однородную задачу (2), в которой $g(x) \equiv m(x)$ и $\Psi_2\{\} \equiv 0$. Поскольку собственные нагрузки обусловлены действием только внутренних (своих) объектов конструкции друг на друга, то в рамках механики Ньютона, согласно которой силы представляют собой произведение масс на ускорения, такие нагрузки возникают, например, если тело отсчета совершает так называемые гармонические колебания во времени относительно конструкции как целостного объекта или, что тоже, все массы конструкции совершают синхронные поступательные колебания относительно тела отсчета. Только при таких движениях произведения масс объектов на их ускорения, пропорционально перемещениям объектов и, следовательно, выполняется соотношение (4) идентифицирующее собственные нагрузки и собственные формы. С учетом этого собственные нагрузки называют инерционными, а собственные значения λ_i и формы соответственно квадратами частот и амплитудами синхронных гармонических колебаний каждой массы конструкции с этой частотой. Размерность их соответственно $\langle \text{время}^{-2} \rangle$ и $\langle \text{длина} \rangle$.

Собственные формы в рассматриваемых случаях представляют собой полную биортогональную систему вещественных функций, т. е. такую систему, для которой имеют место следующие соотношения:

$$\int m(x) \cdot \varphi_p(x) \cdot \varphi_q(x) dx = 0, \quad \text{при } p \neq q \quad (5)$$

здесь и ниже интегрирование/суммирование распространяется во всей конструкции (по всем ее массам). Такое свойство собственных форм позволяет разложить любую вынужденную форму деформирования конструкции $y(x)$ и

любую внешнюю нагрузку $F(x)$ в следующие сходящиеся ряды по этим формам:

$$y(x) = \sum_i y_i \cdot \varphi_i(x); \quad F(x) = \sum_i F_i \cdot \varphi_i(x) \quad (6)$$

Коэффициенты y_i и F_i определяются, если левые и правые части (6) умножить на $m(x) \cdot \varphi_i(x)$ и проинтегрировать такие равенства по всей протяженности конструкции. При этом получим, с учетом (5):

$$y_i = \frac{\int y(x) \cdot m(x) \cdot \varphi_i(x) dx}{\int m(x) \cdot \varphi_i^2(x) dx}; \quad F_i = \frac{\int F(x) \cdot m(x) \cdot \varphi_i(x) dx}{\int m(x) \cdot \varphi_i^2(x) dx} \quad (7)$$

Изложенное позволяет говорить, что собственные формы являются простейшими (элементарными) формами деформирования конструкции или "квантами форм деформирования", из которых состоит любое деформированное состояние конструкции, т.к. суммой этих форм, нормированных определенными коэффициентами, можно описать любую вынужденную форму деформирования конструкции и любую внешнюю нагрузку на нее, с какой угодно точностью. Чем «более похожа» вынужденная форма на какую-либо собственную форму, тем меньшее число слагаемых (6) понадобится для описания этой вынужденной формы и внешней нагрузки с заданной точностью. Понятно, что если вынужденная форма деформирования конструкции совпадет с какой-нибудь собственной формой ее, то согласно (5) и (7) правые части (6) превратятся в одно слагаемое, представляющее собой соответствующую собственную форму. Именно на этом основана следующая основная идея МПП: подбирать параметры конструкции таким образом, чтобы какая-нибудь собственная форма ее становилась бы как можно «ближе» к вынужденной форме деформирования конструкции под действием заданной внешней нагрузки. Такая процедура возможна за счет подбора значений масс объектов, к которым приложены внешние нагрузки, поскольку рассматривается статическое деформирование конструкции и, следовательно, силы инерции, на величину которых может влиять значения масс, не учитываются. С учетом изложенного, становится более понятен физический смысл МПП для упругих конструкций, заключающийся в том, что рассчитываемая конструкция искусственно наделяется инерционными параметрами (массами), расположенными только в местах приложения внешней нагрузки. Как следует из второго закона Ньютона, эти инерционности обязательно должны существовать, хотя в статических расчетах они не учитываются из-за того, что при таких расчетах ускорение конструкции равно нулю. Подбор инерционных параметров осуществляется таким образом, чтобы одна и та же собственная форма (проще всего, соответствующая самому малому по модулю собственному значению) совпадала бы с вынужденной формой деформирования конструкции от заданной нагрузки.

Понятно, что наиболее простыми конструкциями являются одномерные конструкции, а среди них - простейшими являются **Прямолинейные Одномерные Конструкции - ПОК**, под которыми будем понимать конструкции, все массы которых расположены на одной прямой. Любую реальную конструкцию (одномерную, двумерную или трехмерную) можно представить – описать с необходимой точностью расчетной конструкцией состоящей из системы связанных между собой в отдельных сечениях ПОК, по аналогии с тем как с помощью отрезков прямых линий можно достаточно подробно описать

любые другие линии, поверхности и пространственные фигуры. При этом деформирование такой расчетной конструкции может осуществляться таким образом, чтобы сохранялась непрерывность не только перемещений и углов поворота, различных ПОК в местах их соединений, но и любых производных этих перемещений по пространственным координатам, как это может иметь место в реальной конструкции. Из этого следует, что для получения такой расчетной конструкции можно просто "разрезать" реальную конструкцию на полосы, сохраняя необходимую целостность ее только в каких-то местах (сделать "конечномерные разрезы") и рассматривать такие полосы как ПОК. Заметим, в МКЭ для описания конструкции необходимо поступать диаметрально противоположно - не "разрезать" конструкцию на ПОК, а "склеивать" между собой определенным образом в отдельных сечениях заранее заданные конечные элементы. В МКЭ, в набор конечных элементов должен быть достаточно большим с тем, чтобы можно было бы их подбирать исходя из априорных представлений о том, как должны деформироваться реальные конструкции. В МПП используются всего лишь три ПОК, на которые может быть "разрезана" любая конструкция: 1 – балка; 2 – стержень; 3 – вал. Эти три ПОК испытывают соответственно следующие три вида макро деформаций, которые могут иметь место при деформировании любой упругой конструкции в самом общем случае – изгиб, растяжение/сжатие и кручение.

Для каждой такой ПОК оператор, соответствующий $\Psi\{ \}$ в уравнении (1), имеют вид, см.[2; 3; 5]:

$$\Psi\{y(\zeta_\chi)\} = \left\{ P_{4,\chi} \cdot \frac{d^4}{d\zeta_\chi^4} + 2P_{2,\chi} \cdot \frac{d^2}{d\zeta_\chi^2} + 2P_{1,\chi} \cdot \frac{d}{d\zeta_\chi} + P_{0,\chi} \right\} y(\zeta_\chi) - \Lambda\{y(\zeta_\chi)\}; \quad (8)$$

$$\chi = 1, 2, 3, \dots, N$$

здесь $N \geq 1$ - число ПОК, которыми описывается реальная упругая конструкция; $y(\zeta_\chi)$ - деформация χ - ой ПОК, т.е. отклонение её от тривиального (недеформированного) состояния $y(\zeta_\chi) \equiv 0$, имеющая размерность <длина> для балок и стержней и безразмерная (имеющая размерность <угол> в радианах) для валов; $0 \leq \zeta_\chi = x/L_\chi \leq 1$ - безразмерная текущая пространственная координата χ - ой ПОК в локальной системе координат, ось x которой всегда направлена вдоль оси соответствующей ПОК; L_χ - длина χ - ой ПОК; $F(\zeta_\chi)$ - приложенная к массам χ - ой ПОК нагрузка, имеющая размерность <масса · время⁻²> для балок и стержней, и размерность <масса · длина · время⁻²> для валов; безразмерные постоянные коэффициенты $P_{i,\chi}$ где $i=4,2,1,0$, описывающие деформированное состояние χ - ой ПОК, имеют вид:

для балок

$$P_{0,\chi} = D_\chi \cdot (\eta_\chi - \lambda \cdot \rho_\chi \cdot \sigma_\chi); \quad P_{1,\chi} = 0; \quad P_{4,\chi} = 1; \quad D_\chi = \frac{L_\chi^4}{E_\chi \cdot I_\chi};$$

$$P_{2,\chi} = \begin{cases} D_\chi \cdot \frac{S_\chi}{2L_\chi^2} & \text{при отсутствии сдвиговых деформаций} \\ D_\chi \cdot \frac{S_\chi}{2L_\chi^2} - \lambda \cdot \frac{\rho_\chi \cdot L_\chi^2}{2E_\chi} \cdot \left(1 + \frac{E_\chi}{G_\chi \cdot \nu_\chi}\right) & \text{при сдвиговых деформациях} \end{cases}$$

для стержней

$$P_{0,\chi} = D_\chi \cdot (\mu_\chi - \lambda \cdot \rho_\chi \cdot \Omega_\chi); \quad P_{2,\chi} = \frac{1}{2}; \quad P_{4,\chi} = 0;$$

$$P_{1,\chi} = D_\chi \cdot \frac{\tau_\chi}{2L_\chi^2}; \quad D_\chi = \frac{L_\chi^2}{E_\chi \cdot \Omega_\chi}$$

для валов

$$P_{0,\chi} = D_\chi \cdot (\alpha_\chi - \lambda \cdot \rho_\chi \cdot \Im_\chi); \quad P_{2,\chi} = \frac{1}{2}; \quad P_{4,\chi} = 0;$$

$$P_{1,\chi} = \frac{\beta_\chi \cdot L_\chi}{2G_\chi \cdot \Re_\chi}; \quad D_\chi = \frac{L_\chi^2}{G_\chi \cdot \Re_\chi}$$

здесь E_χ и G_χ - модули упругости и сдвига материала χ - ой ПОК, имеющие размерность $\langle \text{масса} \cdot \text{длина}^{-1} \cdot \text{время}^{-2} \rangle$; ρ_χ - плотность материала χ - ой ПОК, имеющая размерность $\langle \text{масса} \cdot \text{длина}^{-3} \rangle$ $\langle \text{масса} \cdot \text{длина}^{-3} \rangle$, которая учитывается, если необходимо определять собственные значения и формы (о чем подробнее говорится ниже) или при определении чисто вынужденных движений от внешней нагрузки, которую можно представить рядом (интегралом) Фурье гармонических колебаний. В последнем случае λ является частотой соответствующего слагаемого ряда Фурье (подынтегрального выражения) и имеет размерность $\langle \text{время}^{-2} \rangle$; I_χ , Ω_χ , $\Im_\chi$ и $\Re_\chi$ - соответственно: момент инерции поперечного сечения, площадь поперечного сечения, полярный момент инерции и момент инерции при кручении поперечного сечения χ - ой ПОК, имеющие размерность соответственно $\langle \text{длина}^4 \rangle$, $\langle \text{длина}^2 \rangle$, $\langle \text{длина}^4 \rangle$, и $\langle \text{длина}^4 \rangle$; S_χ - силы, действующие одновременно на оба конца χ - ой ОК - балки вдоль её оси в противоположных направлениях, имеющие размерность $\langle \text{масса} \cdot \text{длина} \cdot \text{время}^{-2} \rangle$; η_χ , μ_χ , α_χ - коэффициенты упругости основания χ - ой ОК при абсолютных соответственно поперечных и продольных смещениях и кручении сечений её, имеющие размерности $\langle \text{масса} \cdot \text{длина}^{-1} \cdot \text{время}^{-2} \rangle$, $\langle \text{масса} \cdot \text{длина}^{-1} \cdot \text{время}^{-2} \rangle$, $\langle \text{масса} \cdot \text{длина} \cdot \text{время}^{-2} \rangle$; τ_χ , β_χ - коэффициенты упругости основания χ - ой ПОК при относительных соответственно продольных деформациях и кручении её, имеющие размерности $\langle \text{масса} \cdot \text{длина}^{-2} \cdot \text{время}^{-2} \rangle$, $\langle \text{масса} \cdot \text{длина}^2 \cdot \text{время}^{-2} \rangle$; ν_χ - безразмерный коэффициент формы поперечного сечения χ - ой ПОК - балки позволяющий учитывать сдвиг при изгибе её см.[3].

Величина $\Lambda\{y(\zeta_\chi)\}$ описывает все связи χ - ой ПОК с другими ПОК упругой системы (включая и связи различных не смежных сечений этой же ПОК между собой) и с внешними телами (в последнем случае она описывает граничные условия конструкции). Эта величина имеет следующий вид:

$$\Lambda\{y(\zeta_\chi)\} = \sum_{m=1}^{k_\chi} \sum_{n=0}^{k_{\chi,m}} \frac{D_\chi}{L_\chi^n} \cdot \frac{d^n \delta(\zeta_\chi - \zeta_{\chi,m})}{d\zeta_\chi^n} \cdot B_{\chi,m,n}\{y(\zeta_\chi)\}, \quad (9)$$

где $k_\chi \geq 2$ - количество сечений χ - ой ПОК, которые имеют связи с другими ПОК или с внешними телами; $k_{\chi,m}$ - количество типов связи m - го сечения χ - ой ПОК, имеющего координату $\zeta_{\chi,m}$. Поскольку соответствующими связями можно описывать и скачки жесткости (сосредоточенные податливости) ПОК - в том числе и бесконечно большие по величине, то с помощью таких связей

указывают начало и конец χ - ой ПОК координаты которой равны $\zeta_{\chi,1} = 0$ и $\zeta_{\chi,K\chi} = 1$. Тип связи определяется параметром n следующим образом:

для балок

$n = 0$ - связь, создающая в сечении балки с координатой $\zeta_{\chi,m}$ реактивную силу, равную $\frac{D_{\chi}}{L_{\chi}^n} \cdot B_{\chi,m,n} \{y(\zeta_{\chi})\}$, которая препятствует изменению поперечного смещения этого сечения. Такую связь будем называть упругой поперечной опорой. При этом в сечении имеет место скачок третьей производной от смещения, пропорциональный соответствующей силе;

$n = 1$ - связь, создающая в сечении балки с координатой $\zeta_{\chi,m}$ реактивный момент, равный $\frac{D_{\chi}}{L_{\chi}^n} \cdot B_{\chi,m,n} \{y(\zeta_{\chi})\}$, который препятствует изменению поворота этого сечения. Такую связь будем называть упругим защемлением при повороте. При этом в сечении имеет место скачок второй производной от смещения, пропорциональный соответствующему моменту;

$n = 2$ - связь, создающая в сечении балки с координатой $\zeta_{\chi,m}$ при повороте сечения реактивную податливость, равную $\frac{D_{\chi}}{L_{\chi}^n} \cdot B_{\chi,m,n} \{y(\zeta_{\chi})\}$, которая препятствует изменению второй производной смещения в этом сечении. Такую связь будем называть упругий круговой шарнир. При этом в соответствующем сечении имеет место скачок первой производной от смещения, пропорциональный жесткости (податливости) шарнира;

$n = 3$ - связь, создающая в сечении балки с координатой $\zeta_{\chi,m}$ реактивную податливость при смещении этого сечения, равную $\frac{D_{\chi}}{L_{\chi}^n} \cdot B_{\chi,m,n} \{y(\zeta_{\chi})\}$, которая препятствует изменению третьей производной смещения в этом сечении. Такую связь будем называть упругий поперечный ползун. При этом в соответствующем сечении имеет место скачок самого смещения, пропорциональный жесткости (податливости) ползуна.

для стержней или валов

$n = 0$ - связь, препятствующая продольному смещению сечения стержня или кручению сечения вала с координатами $\zeta_{\chi,m}$ и создающая реактивные соответственно продольную силу и скручивающий момент $\frac{D_{\chi}}{L_{\chi}^n} \cdot B_{\chi,m,n} \{y(\zeta_{\chi})\}$.

Такие связи будем называть соответственно упругой продольной опорой и упругим защемлением при закручивании. При этом в соответствующих сечениях имеют место скачки первой производной от продольного смещения и угла закручивания, пропорциональные соответствующей силе и моменту;

$n = 1$ - связь, препятствующая изменению производной продольного смещения стержня или угла закручивания вала в сечениях с координатами $\zeta_{\chi,m}$, и создающая реактивные соответственно продольную силу и скручивающую податливости, равные $\frac{D_{\chi}}{L_{\chi}^n} \cdot B_{\chi,m,n} \{y(\zeta_{\chi})\}$. Такие связи будем называть соответственно упругий продольный ползун и упругий шарнир при закручивании. При этом в соответствующих сечениях имеют место скачки

продольного смещения и угла закручивания, пропорциональные соответствующей силе и моменту.

Заметим, что физический смысл накладывает следующие ограничения. В одном и том же сечении не могут быть связи, описывающие податливости и адекватные им силы и наоборот, т.е. если для стержня или вала $B_{\chi,m,(n+1)}\{y(\zeta_\chi)\} \neq 0$, то $B_{\chi,m,n}\{y(\zeta_\chi)\} = 0$ при $n = 0$ и наоборот, а если для балки $B_{\chi,m,(n+2)}\{y(\zeta_\chi)\} \neq 0$, то $B_{\chi,m,n}\{y(\zeta_\chi)\} = 0$ при $n = 0$ и $n = 1$, и наоборот. Таким образом, количество типов не нулевых связей в одном сечении стержня или вала не может быть больше одного, а в одном сечении балки - не больше двух. Вместе с тем, податливости и адекватные им силы могут располагаться в двух смежных сечениях, координаты которых могут быть численно равны между собой $y(\zeta_{\chi,m}) = y(\zeta_{\chi,m+1})$. В зависимости от того, в каком из этих двух сечений будет расположен тот или иной параметр - будет различным напряженно деформированное состояние системы. В частности, два смежных сечения необходимо обязательно вводить на конце ПОК, если он связан с другими ПОК или внешними телами, т.к. помимо таких связей на конце ПОК всегда необходимо располагать связи, описывающие бесконечно большие податливости, ибо там жесткость ПОК падает до нуля, о чем говорилось выше. Существующие связи конца ПОК располагают во внутренних смежных сечениях их.

Величины $B_{\chi,m,n}\{y(\zeta_\chi)\}$, в общем случае, имеют следующий вид:

$$B_{\chi,m,n}\{y(\zeta_\chi)\} = \sum_{j=1}^{k_{\chi,m,n}} \sum_{f=1}^{k_{\chi,m,n,j}} \sum_{t=0}^{k_{\chi,m,n,j,f}} \sum_{q=0}^{k_{\chi,m,n,j,f,t}} (-\lambda)^{2q} \cdot \frac{T_{\chi,m,n,j,f,t,q}}{L_j^t} \cdot \frac{d^t y(\zeta_{j,f})}{d\zeta_j^t}$$

где $k_{\chi,m,n}$ - количество ПОК, с которыми m -ое сечение χ -ой ПОК имеет связь n -го типа;

$k_{\chi,m,n,j}$ - количество сечений j -ой ПОК, с которыми m -ое сечение χ -ой ПОК имеет связь n -го типа;

$k_{\chi,m,n,j,f}$ - номер производной по пространственной координате от смещения f -го сечения j -ой ПОК, с которым m -ое сечение χ -ой ПОК имеет связь n -го типа и которой (производной) пропорциональна величина такой связи;

$k_{\chi,m,n,j,f,t}$ - величина, принимающая значение 1, если связь инерционная, т.е. если величина реакции соответствующей связи пропорциональна второй производной по времени, и значение 0 - в противоположном случае;

$T_{\chi,m,n,j,f,t,q}$ - коэффициент пропорциональности, определяющий величину связи n -го типа m -го сечения χ -ой ПОК с t -ой производной по пространственной координате и $2q$ -ой производной по времени f -го сечения j -ой ПОК.

Физическая размерность этого коэффициента $\left\langle \text{время}^{2q} \cdot \text{длина}^{n+t} \cdot \left\langle \frac{y(\zeta_\chi)}{D_\chi} \right\rangle \right\rangle$

С учетом (8) и других выше приведенных выражений, решение (1) определяется следующим образом:

$$y(\zeta) = \sum_{\chi=1}^N y(\zeta_{\chi}) \cdot \Delta(\zeta_{\chi}) \quad (10)$$

$$\text{где } y(\zeta_{\chi}) = L_{\chi} \cdot \int_0^{\zeta_{\chi}} [D_{\chi} \cdot F(\varsigma) + \Lambda\{\varsigma\}] \cdot Z_{P_{\chi}}(\zeta_{\chi} - \varsigma) \cdot d\varsigma$$

$$\Delta(\zeta_{\chi}) = \sigma_1(\zeta_{\chi} - \zeta_{\chi,1}) - \sigma_2(\zeta_{\chi} - \zeta_{\chi,k_{\chi}});$$

$$\sigma_1(\vartheta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \vartheta < 0 \\ 1 & \text{при } \vartheta \geq 0 \end{cases}; \quad \sigma_2(\vartheta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \vartheta \leq 0 \\ 1 & \text{при } \vartheta > 0 \end{cases}$$

ζ - текущая пространственная координата системы, т.е. координата любого сечения любой ПОК. Здесь и ниже функции $Z_k(\zeta)$, где $k = 1, 2, \dots, P_{\chi}$ (для балок $P_{\chi} = 4$, для стержней и валов $P_{\chi} = 2$) определяются следующими формулами и представляют собой фундаментальную систему решений однородного уравнения $\Psi\{Z_k(\zeta)\} = 0$, в котором $\Lambda\{\} \equiv 0$.

для балок

$$Z_1(\varsigma) = \begin{cases} \frac{S_{1,\chi} \cos(\sqrt{S_{2,\chi}} \varsigma) + S_{2,\chi} ch(\sqrt{S_{1,\chi}} \varsigma)}{2\sqrt{R_{\chi}}} & \text{при } P_{0,\chi} < 0; \\ 1 & \text{при } P_{0,\chi} = 0; \\ \frac{S_{1,\chi} \cos(\sqrt{S_{2,\chi}} \varsigma) + S_{2,\chi} \cos(\sqrt{-S_{1,\chi}} \varsigma)}{2\sqrt{R_{\chi}}} & \text{при } P_{0,\chi} > 0, R_{\chi} > 0, P_{1,\chi} \geq 0; \\ \frac{S_{1,\chi} ch(\sqrt{-S_{2,\chi}} \varsigma) + S_{2,\chi} ch(\sqrt{S_{1,\chi}} \varsigma)}{2\sqrt{R_{\chi}}} & \text{при } P_{0,\chi} > 0, R_{\chi} > 0, P_{1,\chi} < 0; \\ \frac{\cos(\sqrt{P_{1,\chi}} \varsigma) + \sqrt{P_{1,\chi}} \varsigma \sin(\sqrt{P_{1,\chi}} \varsigma)}{2} & \text{при } R_{\chi} = 0, P_{1,\chi} \geq 0; \\ \frac{ch(\sqrt{-P_{1,\chi}} \varsigma) - \sqrt{-P_{1,\chi}} \varsigma sh(\sqrt{-P_{1,\chi}} \varsigma)}{2} & \text{при } R_{\chi} = 0, P_{1,\chi} < 0; \\ \frac{\cos(S_{1,\chi} \varsigma) ch(S_{2,\chi} \varsigma) + \sin(S_{1,\chi} \varsigma) sh(S_{2,\chi} \varsigma)}{\sqrt{-R_{\chi}}} & \text{при } R_{\chi} < 0; \end{cases}$$

$$Z_2(\varsigma) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{R_\chi}} \left[\frac{S_{1,\chi} \sin(\sqrt{S_{2,\chi}} \varsigma)}{\sqrt{S_{2,\chi}}} + \frac{S_{2,\chi} \operatorname{sh}(\sqrt{S_{1,\chi}} \varsigma)}{\sqrt{S_{1,\chi}}} \right] & \text{при } P_{0,\chi} < 0; \\ \zeta_\chi & \text{при } P_{0,\chi} = 0; \\ \frac{1}{2\sqrt{R_\chi}} \left[\frac{S_{1,\chi} \sin(\sqrt{S_{2,\chi}} \varsigma)}{\sqrt{S_{2,\chi}}} + \frac{S_{2,\chi} \sin(\sqrt{-S_{1,\chi}} \varsigma)}{\sqrt{-S_{1,\chi}}} \right] & \text{при } P_{0,\chi} > 0, R_\chi > 0, P_{1,\chi} \geq 0; \\ \frac{1}{2\sqrt{R_\chi}} \left[\frac{S_{1,\chi} \operatorname{sh}(\sqrt{-S_{2,\chi}} \varsigma)}{\sqrt{-S_{2,\chi}}} + \sqrt{S_{1,\chi}} S_{2,\chi} \operatorname{sh}(\sqrt{S_{1,\chi}} \varsigma) \right] & \text{при } P_{0,\chi} > 0, R_\chi > 0, P_{1,\chi} < 0; \\ \frac{1}{2} \left[\frac{3 \sin(\sqrt{P_{1,\chi}} \varsigma)}{\sqrt{P_{1,\chi}}} - \varsigma \cos(\sqrt{P_{1,\chi}} \varsigma) \right] & \text{при } R_\chi = 0, P_{1,\chi} \geq 0; \\ \frac{1}{2} \left[\frac{3 \operatorname{sh}(\sqrt{-P_{1,\chi}} \varsigma)}{\sqrt{-P_{1,\chi}}} - \varsigma \operatorname{ch}(\sqrt{-P_{1,\chi}} \varsigma) \right] & \text{при } R_\chi = 0, P_{1,\chi} < 0; \\ \frac{1}{\sqrt{-R_\chi} P_{0,\chi}} \left[\begin{aligned} & S_{1,\chi} (\sqrt{P_{0,\chi}} - 2P_{1,\chi}) \cos(S_{1,\chi} \varsigma) \operatorname{sh}(S_{2,\chi} \varsigma) + \\ & S_{2,\chi} (\sqrt{P_{0,\chi}} + 2P_{1,\chi}) \sin(S_{1,\chi} \varsigma) \operatorname{ch}(S_{2,\chi} \varsigma) \end{aligned} \right] & \text{при } R_\chi < 0; \end{cases}$$

$$Z_3(\varsigma) = \begin{cases} \frac{ch(\sqrt{S_{1,\chi}}\varsigma) + \cos(\sqrt{S_{2,\chi}}\varsigma)}{2\sqrt{R_\chi}} & \text{при } P_{0,\chi} < 0; \\ \frac{1 - \cos(\sqrt{2P_{1,\chi}}\varsigma)}{2P_{1,\chi}} & \text{при } P_{0,\chi} = 0, P_{1,\chi} > 0; \\ \frac{1 - ch(\sqrt{-2P_{1,\chi}}\varsigma)}{2P_{1,\chi}} & \text{при } P_{0,\chi} = 0, P_{1,\chi} < 0; \\ \frac{\varsigma^2}{2} & \text{при } P_{0,\chi} = 0, R_\chi > 0, P_{1,\chi} = 0; \\ \frac{\cos(\sqrt{-S_{1,\chi}}\varsigma) - \cos(\sqrt{S_{2,\chi}}\varsigma)}{2\sqrt{R_\chi}} & \text{при } P_{0,\chi} > 0, R_\chi > 0, P_{1,\chi} > 0; \\ \frac{ch(\sqrt{S_{1,\chi}}\varsigma) - ch(\sqrt{-S_{2,\chi}}\varsigma)}{2\sqrt{R_\chi}} & \text{при } P_{0,\chi} > 0, R_\chi > 0, P_{1,\chi} < 0; \\ \frac{\varsigma \sin(\sqrt{P_{1,\chi}}\varsigma)}{2\sqrt{P_{1,\chi}}} & \text{при } R_\chi = 0, P_{1,\chi} \geq 0; \\ \frac{\varsigma sh(\sqrt{-P_{1,\chi}}\varsigma)}{2\sqrt{-P_{1,\chi}}} & \text{при } R_\chi = 0, P_{1,\chi} < 0; \\ \frac{\sin(S_{1,\chi}\varsigma) sh(S_{2,\chi}\varsigma)}{\sqrt{-R_\chi}} & \text{при } R_\chi < 0; \end{cases}$$

$$Z_4(\varsigma) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{R_\chi}} \left[\frac{sh(\sqrt{S_{1,\chi}} \varsigma)}{\sqrt{S_{1,\chi}}} - \frac{\sin(\sqrt{S_{2,\chi}} \varsigma)}{\sqrt{S_{2,\chi}}} \right] & \text{при } P_{0,\chi} < 0 \\ \frac{1}{2P_{1,\chi}} \left[\varsigma - \frac{\sin(\sqrt{2P_{1,\chi}} \varsigma)}{\sqrt{2P_{1,\chi}}} \right] & \text{при } P_{0,\chi} = 0, P_{1,\chi} > 0; \\ \frac{1}{2P_{1,\chi}} \left[\varsigma - \frac{sh(\sqrt{-2P_{1,\chi}} \varsigma)}{\sqrt{-2P_{1,\chi}}} \right] & \text{при } P_{0,\chi} = 0, P_{1,\chi} < 0; \\ \varsigma^3 / 3 & \text{при } P_{0,\chi} = 0, R_\chi > 0, P_{1,\chi} = 0; \\ \frac{1}{2\sqrt{R_\chi}} \left[\frac{\sin(\sqrt{-S_{1,\chi}} \varsigma)}{\sqrt{-S_{1,\chi}}} - \frac{\sin(\sqrt{S_{2,\chi}} \varsigma)}{\sqrt{S_{2,\chi}}} \right] & \text{при } P_{0,\chi} > 0, R_\chi > 0, P_{1,\chi} > 0; \\ \frac{1}{2\sqrt{R_\chi}} \left[\frac{sh(\sqrt{S_{1,\chi}} \varsigma)}{\sqrt{S_{1,\chi}}} - \frac{sh(\sqrt{-S_{2,\chi}} \varsigma)}{\sqrt{-S_{2,\chi}}} \right] & \text{при } P_{0,\chi} > 0, R_\chi < 0, P_{1,\chi} < 0; \\ \frac{1}{2P_{1,\chi}} \left[\frac{\sin(\sqrt{P_{1,\chi}} \varsigma)}{\sqrt{P_{1,\chi}}} - \varsigma \cdot \cos(\sqrt{P_{1,\chi}} \varsigma) \right] & \text{при } R_\chi = 0, P_{1,\chi} \geq 0; \\ \frac{1}{2P_{1,\chi}} \left[\frac{sh(\sqrt{-P_{1,\chi}} \varsigma)}{\sqrt{-P_{1,\chi}}} - \varsigma \cdot ch(\sqrt{-P_{1,\chi}} \varsigma) \right] & \text{при } R_\chi = 0, P_{1,\chi} < 0; \\ \frac{S_{2,\chi} \sin(S_{1,\chi} \varsigma) ch(S_{2,\chi} \varsigma) - S_{1,\chi} \cos(S_{1,\chi} \varsigma) sh(S_{2,\chi} \varsigma)}{2} & \text{при } R_\chi < 0; \end{cases}$$

для стержней и валов

$$Z_1(\varsigma) = \begin{cases} \Phi(\varsigma) ch(\sqrt{R_\chi} \varsigma) & \text{при } R_\chi \geq 0; \\ \Phi(\varsigma) \cos(\sqrt{-R_\chi} \varsigma) & \text{при } R_\chi < 0; \end{cases} \quad Z_2(\varsigma) = \begin{cases} \frac{\Phi(\varsigma) sh(\sqrt{R_\chi} \varsigma)}{\sqrt{R_\chi}} & \text{при } R_\chi > 0; \\ \frac{\Phi(\varsigma) \sin(\sqrt{-R_\chi} \varsigma)}{\sqrt{-R_\chi}} & \text{при } R_\chi < 0; \\ \Phi(\varsigma) \cdot \varsigma & \text{при } R_\chi = 0; \end{cases}$$

Выше введены следующие обозначения, в которых для балок вместо коэффициентов $P_{1,\chi}$ надо везде писать $P_{2,\chi}$:

$$R_{\chi} = P_{1,\chi}^2 - P_{0,\chi}; \quad \Phi(\zeta) = ch(P_{1,\chi}\zeta) - sh(P_{1,\chi}\zeta);$$

$$S_{1,\chi} = \begin{cases} -P_{1,\chi} + \sqrt{R_{\chi}} & \text{при } R_{\chi} > 0; \\ \sqrt{\frac{P_{0,\chi} + P_{1,\chi}}{2}} & \text{при } R_{\chi} \leq 0; \end{cases} \quad S_{1,\chi} = \begin{cases} P_{1,\chi} + \sqrt{R_{\chi}} & \text{при } R_{\chi} > 0; \\ \sqrt{\frac{P_{0,\chi} - P_{1,\chi}}{2}} & \text{при } R_{\chi} \leq 0; \end{cases}$$

Подставляя в (10) выражение (9), получим для $F(\zeta) \equiv 0$ - случая, который ниже нам понадобится:

$$y(\zeta) = \sum_{\chi=1}^N \sum_{m=1}^{k_{\chi}} \sum_{n=0}^{k_{\chi,m}} \frac{D_{\chi}^{(n)}}{L_{\chi}^n} Z_{p_{\chi}}^{(n)}(\zeta_{\chi} - \zeta_{\chi,m}) \cdot B_{\chi,m,n} \{y(\zeta_{\chi})\} \cdot \sigma_1(\zeta_{\chi} - \zeta_{\chi,m}) \cdot \Delta(\zeta_{\chi}) \quad (11)$$

Здесь $Z_k^{(n)}(\zeta)$ - n -ая производная по ζ функции $Z_k(\zeta)$. Все производные этих функций выражаются через сами эти функции, а в нулевой точке, они обладают свойством единичной диагональной матрицы, т.е. $Z_{\alpha}^{(p)}(0) = \delta_{\alpha,p}$, где символ Кронекера $\delta_k^{(k)} = 1$ и $\delta_k^{(p)} = 0$ при $k \neq p$. Матрицы производных имеют вид:

для балок

P / k	0	1	2	3
1	$Z_1(\zeta_{\chi})$	$-P_{0,\chi} \cdot Z_4(\zeta_{\chi})$	$-P_{0,\chi} \cdot Z_3(\zeta_{\chi})$	$-P_{0,\chi} \cdot [Z_2(\zeta_{\chi}) - 2P_{1,\chi} \cdot Z_4(\zeta_{\chi})]$
2	$Z_2(\zeta_{\chi})$	$Z_1(\zeta_{\chi})$	$-P_{0,\chi} \cdot Z_4(\zeta_{\chi})$	$-P_{0,\chi} \cdot Z_3(\zeta_{\chi})$
3	$Z_3(\zeta_{\chi})$	$Z_2(\zeta_{\chi}) - 2P_{1,\chi} \cdot Z_4(\zeta_{\chi})$	$Z_1(\zeta_{\chi}) - 2P_{1,\chi} \cdot Z_3(\zeta_{\chi})$	$(4P_{1,\chi}^2 - P_{0,\chi}) \cdot Z_4(\zeta_{\chi}) - 2P_{1,\chi} \cdot Z_2(\zeta_{\chi})$
4	$Z_4(\zeta_{\chi})$	$Z_3(\zeta_{\chi})$	$Z_2(\zeta_{\chi}) - 2P_{1,\chi} \cdot Z_4(\zeta_{\chi})$	$Z_1(\zeta_{\chi}) - 2P_{1,\chi} \cdot Z_3(\zeta_{\chi})$

для стержней и валов

P \ k	0	1
1	$Z_1(\zeta_{\chi})$	$(P_{1,\chi}^2 - P_{0,\chi}) \cdot Z_2(\zeta_{\chi}) - P_{1,\chi} \cdot Z_1(\zeta_{\chi})$
2	$Z_2(\zeta_{\chi})$	$Z_1(\zeta_{\chi}) - P_{1,\chi} \cdot Z_2(\zeta_{\chi})$

В выражении (8) неизвестными являются величины $B_{\chi,m,n} \{y(\zeta_{\chi})\}$, которые можно определить, если к (8) применить операторы $B_{\alpha\beta,\gamma} \{y(\zeta_{\alpha})\}$, где

$\alpha = 1, 2, \dots, N; \beta = 1, 2, \dots, k_{\alpha}; \gamma = 1, 2, \dots, k_{\alpha, \beta}$. Получающаяся при этом совместно с (8) система однородных линейных алгебраических уравнений относительно $y(\zeta)$ и этих неизвестных $V_{\chi, m, n} \{y(\zeta_{\chi})\}$ имеет нетривиальное решение только в случае равенства нулю следующего определителя из коэффициентов при неизвестных:

$$\|a_{i, j}\| = 0 \quad (12)$$

$$\text{здесь } a_{i, j} = V_{\alpha, \beta, \gamma} \left\{ \frac{R_{\chi}}{L_{\chi}^n} Z_{p_{\chi}}^{(n)}(\zeta_{\chi} - \zeta_{\chi, m}) \cdot \sigma_1(\zeta_{\chi} - \zeta_{\chi, m}) \cdot \Delta(\zeta_{\chi}) \right\} - \delta_{\alpha, \beta, \gamma}^{\chi, m, n}, \quad (13)$$

где $\delta_{\alpha, \beta, \gamma}^{\chi, m, n}$ - единичный тензор 6-го ранга, равный единице при одновременном выполнении $\alpha = \chi$, $\beta = m$, $\lambda = n$, и равный нулю во всех других случаях; индексы j и i меняются с шагом 1, начиная от 1 для каждого ниже приведенного изменения индексов соответственно χ , m , n , и α , β , γ :

$$\begin{array}{ll} \chi & \text{от 1 с шагом 1 до } N; \\ m & \text{от 1 с шагом 1 до } k_{\chi}; \\ n & \text{от 0 с шагом 1 до } k_{\chi m}; \end{array} \quad \begin{array}{ll} \alpha & \text{от 1 с шагом 1 до } N; \\ \beta & \text{от 1 с шагом 1 до } k_{\alpha}; \\ \gamma & \text{от 0 с шагом 1 до } k_{\alpha \beta}; \end{array}$$

Уравнение (12) называют характеристическим. Оно служит для определения собственных значений λ однородной задачи, соответствующей исходной задаче (1) (с учетом (8)), т.е. если принять внешнюю нагрузку отсутствующей $F(\zeta) \equiv 0$ и учитывать инерционные параметры системы $p_{\chi} \neq 0$ и $T_{\chi, m, n, j, f, t, 1} \neq 0$. Собственная форма этой задачи найдется как решение выше указанной системы однородных линейных алгебраических уравнений относительно $y(\zeta)$, в которых λ совпадает с соответствующим корнем уравнения (12). В силу однородности этой системы, все нетривиальные её неизвестные будут линейно зависимыми и, следовательно, все они могут быть выражены через одну переменную $V_{\chi, m, n} \{y(\zeta_{\chi})\} \neq 0$. С точностью до сомножителя (для МПП этого вполне достаточно) значения для $y(\zeta)$ будут определяться соответствующими значениями следующего определителя:

$$y(\zeta) = \|a_{i, j}\| \quad (14)$$

элементы которого вычисляются по формулам (13) за исключением элементов, для которых индекс i соответствует $\alpha = \chi$, $\beta = m$, $\gamma = n$. Выражения для этих элементов имеют вид:

$$a_{i, j} = \sum_{\chi=1}^N Z_{p_{\chi}}^{(n)}(\zeta_{\chi} - \zeta_{\chi, m}) \cdot \sigma_1(\zeta_{\chi} - \zeta_{\chi, m}) \cdot \Delta(\zeta_{\chi}) \quad (15)$$

Следует иметь ввиду, что слагаемые в (11), имеющие сомножителями $V_{\chi, K_{\chi}, n} \{y(\zeta_{\chi})\}$, т.е. соответствующие связям, расположенным в последних сечениях каждой χ -ой ПОК, и могут быть опущены, т.к. они будут равны нулю не только при $0 \leq \zeta_{\chi} < \zeta_{\chi, K_{\chi}}$ из-за $\sigma_1(\leq 0) = 0$, но и будут обращаться в нуль при $\zeta_{\chi} = \zeta_{\chi, K_{\chi}}$ из-за $Z_{p_{\chi}}^{(n)}(0) = 0$, поскольку всегда $n \neq p$. Если эти слагаемые в (11)

опустить, то уменьшится число неизвестных $V_{\chi, m, n} \{y(\zeta_{\chi})\}$ и для их определения из указанной системы линейных алгебраических уравнений можно не рассматривать те уравнения, которые получаются при применении к (11) операторов $V_{\alpha, 1, \gamma} \{y(\zeta_{\alpha})\}$, т.е. соответствующих первым сечениям α -ой ПОК. Если эти рекомендации не учитывать, то в определителях (12) и (14) столбцы,

для которых $m = K_\chi$, и строки, для которых $\beta = 1$ будут состоять из одних нулей.

Заметим, что коэффициенты пропорциональности $T_{\chi,m,n,j,f,t,q}$, количественно определяющие связи ПОК, могут быть и бесконечно большими по величине. Это имеет место при описании абсолютно жестких опор и защемления или абсолютно податливых шарниров. В указанных случаях сомножители при этих коэффициентах, являющиеся соответствующими кинематическими параметрами деформаций, будут равны нулю. Это обусловлено тем, что величины $B_{\chi,m,n}\{\gamma(\zeta_\chi)\}$, имеющие выше приведенный физический смысл, имеют конечные значения. Такие ситуации формально отражаются в (13) тем, что при описании абсолютных или опоры, или защемления или шарнира, соответствующие значения коэффициентов должны приниматься равными единице, а тензоры 6-го порядка должны приниматься полностью нулевыми (не единичными). В случае если в каком-нибудь сечении несколько коэффициентов пропорциональности $T_{\chi,m,n,j,f,t,q}$ имеют различные бесконечно большие значения, то в силу однородности рассматриваемой задачи, вместо соответствующих значений коэффициентов надо подставлять не единицы, а порядки этих бесконечно больших значений по отношению к бесконечно большому значению любого из этих коэффициентов. Это может иметь место при описании абсолютно жестких/податливых связей с любой степенью пропорциональности, включая и инверсию знаков связей (как это имеет место при рычажных механизмах связи сечений друг с другом).

Понятно, что если внешняя нагрузка на χ -ю ПОК, подобна связям ее с другими ПОК, т.е. $F(\zeta_\chi) \cong \Lambda\{\gamma(\zeta_\chi)\}$, то итерационный процесс МПП легко реализуется согласно выше приведенным формулам. А именно, решения уравнения (2) на каждой итерации (при этом $\Psi_2 \{ \} \equiv 0$) получается как значения определителя (14), элементы которого вычисляются по формулам (13) и (15), в которых λ принимает собственные значения, определяемые (12). Такая широкая унификация позволяет легко запрограммировать изложенную процедуру МПП, а сама программа получается весьма компактной. То, что внешняя нагрузка должна быть подобной связям ПОК, отнюдь не означает, что она должна быть приложена только в точках соединения ПОК друг с другом или с внешними телами. Нагрузка может быть равномерно распределена вдоль ПОК. При этом необходимо принимать в (8) $\rho_\chi \neq 0$, т.е. принимать ненулевые (произвольные) соответствующие плотности материалов. Кроме этого, нагрузка может быть сосредоточенной - приложенной в любой точке упругой системы и может быть или силой, или моментом, или величиной, создающей скачок первой производной или самой деформации. Для этого достаточно искусственно вводить в соответствующих точках системы инерционные связи сечений с самими собой, типы которых определяются значениями $n = 0 ; 1 ; 2 ; 3$, и соответствуют выше сопоставленным этим значениям сосредоточенным нагрузкам. Коэффициенты пропорциональности таких связей при этом принимаются ненулевыми (произвольными), т.е. $T_{\chi,m,n,\chi,m,n,1} \neq 0$. Сказанное должно быть учтено только при составлении компьютерной программы МПП, и при выборе расчетной схемы конструкции (при "разрезании" ее) расчетчик не должен заботиться о введении искусственных инерционных связей сечений с самими собой в местах расположения в них внешних нагрузок.

В качестве примера, иллюстрирующего применение МПП к расчету упругих систем, рассмотрена простейшая задача - расчет шарнирно опертой по концам балки длиной 100 м. и прямоугольным поперечным сечением шириной 0,5 м. и высотой $h=1$ м., нагруженной тремя равными друг другу сосредоточенными силами 100 Н., приложенными в четвертях пролета балки $\zeta_{1,2} = 0,25$; $\zeta_{1,2} = 0,50$; $\zeta_{1,2} = 0,75$. Столь примитивный пример выбран только лишь потому, что он допускает получение аналитических решений для всех вычислений. Это обусловлено тем, что характеристическое уравнение (12) в этом случае является алгебраическим уравнением третьей степени, которое может быть разрешено в радикалах. В следующей таблице приведены численные значения для последовательных итераций прогибов балки в местах приложения сил и расхождения этих итераций с точным решением.

№ итераций	$y(\zeta_{1,2}) = y(\zeta_{1,4})$ м	$y(\zeta_{1,3})$ м	$\Delta y(\zeta_{1,2}) = \Delta y(\zeta_{1,4})$ %	$\Delta y(\zeta_{1,3})$ %
1.	0,0004788	0,0004788	-1,687	+1,696
2.	0,00040888	0,00057822	+0,1953	-0,2775
3.	0,00040974	0,00057652	-0,0244	+0,0347
4.	0,00040973	0,00057655	+0,0009	-0,0012
5.	0,00040972	0,00057658	-0,0	+0,0

Как видно из этой таблицы каждая итерация повышает практически на порядок точность приближений, получаемых то с недостатком, то с избытком по сравнению с точным решением. Хорошее приближение к точному решению уже первой итерации объясняется тем, что нулевые итерации для $g(\zeta)$ и $y(\zeta)$ приняты таковыми, чтобы нулевая итерация прогиба рассматриваемой балки совпадала бы с первой собственной формой этой балки, несущей в местах расположения сил сосредоточенные массы значений которых пропорциональны значениям соответствующих сил. Такой выбор нулевых итераций рекомендуется и в любых других случаях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ротгауз Б.А. О существовании аксиоматической парадигмы естествознания. <http://rotgauz.narod.ru/Paradigma-my-sait.pdf>
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М., 1959
3. Вибрации в технике. Справочник в 6 томах, т. 1 М., 1978
4. Коддингтон З.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1958
5. Ротгауз Б.А. Динамический расчет континуальных и дискретных стержневых систем. Строительная. Механика и расчет сооружений, ЦНИИСК, М. 1982, № 2
6. Ротгауз Б.А., Ротгауз В.Б. Расчет упругих систем методом подбора параметров (МПП). Будівельні конструкції, Випуск 52, Київ, НДІНБК, 2000

Ротгауз Борис Абрамович E-mail: brotgauz@mail.ru

Ротгауз Вадим Борисович E-mail: ybr@solar.unity.net

01.08.2006

Последние редакционные изменения 11.09.2010